ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ಸನ್ಯಾಸಿಯೊಬ್ಬರ ಗಣಿತ

ಪ್ರಚಾರ ಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ—೧೯೮

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
೧೯೭೨

ಪ್ರಚಾರ ಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ 198

ಸನ್ಯಾಸಿಯೊಬ್ಬರ ಗಣಿತ

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
1972

ಮೊದಲನೆಯ ಮುದ್ರಣ: 1972

ಪ್ರತಿಗಳು : 5000

ಬೆಲೆ: 25 ಪೈಸೆ

ಪ್ರಕಾಶಕರು

ಡೈರೆಕ್ಟರ್, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-6

ಮುದ್ರಕರು

ಕನಕಧಾರಾ ಪ್ರೆಸ್, ಮೈಸೂರು-9

ಪೀಠಿಕೆ

ಶ್ರೀ ಶ್ರೀ ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯ ಭಾರತೀಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರವರು ತಮ್ಮ 'Vedic Mathematics' ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಅಂಕಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ವಿಧಾನಗಳು ನವೀನವಾಗಿವೆ, ಮತ್ತೆಲ್ಲಿಯೂ ಇವು ಸಿಗಲಾರವು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಅಂದವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಈ ಸಣ್ಣ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕನ್ನಡನಾಡಿನ ಬಾಲಕ ಬಾಲಕಿಯರೂ ಅವರ ಶಿಕ್ಷಕರೂ ಇತರರೂ ಈ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿ ಬಳಕೆಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳುವರೆಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ಪರಿಚಯ

ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಎಸಗಿರುವ ಅದ್ಭುತ ಸಾಹಸಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಚಂದ್ರಲೋಕಕ್ಕೆ ಮಾನವ ಹೋಗಿ ಕಾಲಿಟ್ಟು ಅಲ್ಲಿಂದ ಕಲ್ಲು ಮಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಭೂಮಿಗೆ ತಂದುದು, ಅಲ್ಲಿಗೆ ಹೋಗದೆಯೇ ಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿ ಅಲ್ಲಿನ ಕಲ್ಲುಮಣ್ಣುಗಳನ್ನು ತಂದುದು, ಯಾವ ದುರ್ಬೀನಿಗೂ ಸಿಲುಕದಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯೋತಿರ್ಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯೋ ಅಲೆಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಮುಂತಾದ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಪವಾಡ ಗಳು ಈ ಅಲ್ಪ ಮಾನವನ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಕ್ಕೂ ಎಟುಕದ ವಿಷಯ ಯಾವುದಿದೆ ಎಂಬ ಹೆಮ್ಮೆಯನ್ನು ಮೂಡಿಸು ತ್ತವೆ. ಆದರೆ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮೀರಿದ ಚಿಚ್ಛಕ್ತಿ ಇದೆ ಎಂಬು ದನ್ನು ಭಾರತೀಯರು ನಂಬುವರು. ವಿಜ್ಞಾನದಿಂದ ಸಮರ್ಥಿಸ ಲಾಗದ ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಾವು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪುಟ್ಟ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ರುವ ಗಣಿತ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಶಾಸ್ತ್ರಾನುಸಾರ ಸಮರ್ಥಿಸ ಲಾದೀತು. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಮಹಾಪುರುಷನು ಅವುಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಬಗೆ ಗಣಿತ ಸಮರ್ಥನೆಗಳಿಂದಲ್ಲ, ಅನಿರ್ವಚನೀಯವಾದ ಅಂತಃಚಕ್ಷುಸ್ಸಿನ ಬೆಳಕಿನಿಂದ, ಆತನ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವೆವು.

ಇಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದವರು ಪುರಿ (ಜಗನ್ನಾಥ) ಕ್ಷೇತ್ರದ ಗೋವರ್ಧನ ಮಠಾಧೀಶ್ವರರಾಗಿದ್ದ "ಶ್ರೀಶ್ರೀ-ಜಗದ್ಗುರು ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯಭಾರತೀ ಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥಜೀ ಮಹಾರಾಜ್"–ಅವರು. ಇವರು ಜನ್ಮತಾಳಿದುದು ತಮಿಳು ನಾಡಿನ ತಿರುನಲ್ವೇಲಿಯಲ್ಲಿ 1884ನೇ ಮಾರ್ಚಿಯಲ್ಲಿ. ತಂದೆ ಪಿ. ನರಸಿಂಹಶಾಸ್ತ್ರಿ, ಅಲ್ಲಿ ತಹಶೀಲ್ದಾರರಾಗಿದ್ದರು. ಬಾಲಕನ ಪೂರ್ವಾಶ್ರಮದ ಹೆಸರು ವೆಂಕಟರಾಮನ್. ತಿರುಚನಾಪಳ್ಳಿ ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿಯೂ, ತಿರುನಲ್ವೇಲಿಯ ಚರ್ಚ್ ಮಿಷನರಿ ಸೊಸೈಟಿ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಹಿಂದೂ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿಯೂ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಪಡೆದು, 1899ನೇ ಜನವರಿಯಲ್ಲಿ ಮದರಾಸ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಮೆಟ್ರಿಕ್ಯುಲೇಷನ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣನಾಗಿ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ಸಂಸ್ಕೃತದಲ್ಲಿಯೂ, ವಾಗ್ಮಿತೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇವನ ಪ್ರತಿಭೆಗಾಗಿ ಮದರಾಸ್ ಸಂಸ್ಕೃತ ಸಂಘವು ಇವನಿಗೆ 1899ನೇ ಜುಲೈನಲ್ಲಿ "ಸರಸ್ವತಿ" ಎಂಬ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಿತು. ಬಿ. ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಳಿಸಿ, ವೆಂಕಟರಾಮನ್ 1903ರಲ್ಲಿ ನ್ಯೂಯಾರ್ಕ್ ರಾಚೆಸ್ಟರಿನ ಅಮೆರಿಕನ್ ಕಾಲೇಜ್ ಆಫ್ ಸೈನ್ಸ್‌ನ ಎಂ. ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಬೊಂಬಾಯಿ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಕುಳಿತನು. 1904ರಲ್ಲಿ ಎಂ.ಎ. ಪದವಿ ದೊರೆಯಿತು. ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳು : ಸಂಸ್ಕೃತ, ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರ, ಇಂಗ್ಲಿಷ್, ಗಣಿತ, ಚರಿತ್ರೆ, ವಿಜ್ಞಾನ. ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿಯೂ ಉನ್ನತಸ್ಥಾನ ಪಡೆದನು.

1905ರಲ್ಲಿ ವೆಂಕಟರಾಮನ್‌ಸರಸ್ವತಿ ಅವರು ಗೋಪಾಲ ಕೃಷ್ಣಗೋಖಲೆ ಅವರ ನೇತೃತ್ವದಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ

ಕೆಲಸ ಮಾಡತೊಡಗಿದರು. ಆದರೆ ಆಧ್ಯಾತ್ಮವಿದ್ಯೆಯ ಕಡೆಗೆ ತೀವ್ರಸೆಳೆತವುಂಟಾಗಿ, 1908ರಲ್ಲಿ ಶೃಂಗೇರಿಮಠದ ಶ್ರೀ ಸಚ್ಚಿದಾನಂದ ಶಿವಾಭಿನವ ನರಸಿಂಹಭಾರತಿ ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಸನ್ನಿಧಾನಕ್ಕೆ ಬಂದರು. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ದೇಶದ ನಾಯಕರುಗಳ ಒತ್ತಾಯಕ್ಕೆ ಮಣಿದು ರಾಜಮಹೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹೊಸದಾಗಿ ತೆರೆದ ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜಿನ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಾಲರ ಹುದ್ದೆಯನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿದರು. ಮೂರು ವರ್ಷ ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದರು. ಆಧ್ಯಾತ್ಮಿಕ ಜ್ಞಾನದ ಕಡೆಗೆ ಸೆಳೆತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಉದ್ಯೋಗವನ್ನು ಕಿತ್ತೊಗೆದು ಮತ್ತೆ ಶೃಂಗೇರಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿದರು.

ಎಂಟು ವರ್ಷಕಾಲ ಉನ್ನತ ವೇದಾಂತ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿ ಬ್ರಹ್ಮಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು. ಶ್ರೀ ಶ್ರೀ ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಅಡಿದಾವರೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಠಪ್ರವಚನಗಳನ್ನು ಪಡೆದು, ಸಮೀಪದ ಅರಣ್ಯಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಶೃಂಗೇರಿಯ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕೃತ, ತತ್ವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳನ್ನು ಕಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಆಗಿಂದಾಗ್ಗೆ ಆಹ್ವಾನಿತರಾಗಿ ಪೂನಾ, ಬೊಂಬಾಯಿ ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಳಗಳಿಗೆ ಹೋಗಿ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದ್ದರು.

1919ನೇ ಜುಲೈ 4ರಲ್ಲಿ ಕಾಶಿಯ ಶಾರದಾಪೀಠದ ಜಗದ್ಗುರು ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯ ಶ್ರೀ ತ್ರಿವಿಕ್ರಮತೀರ್ಥಜೀ ಮಹಾರಾಜ್ ಅವರಿಂದ ಸಂನ್ಯಾಸಾಶ್ರಮವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿದರು. ಸ್ವಾಮಿಭಾರತಿ ಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥ ಎಂಬ ನಾಮಾಂಕಿತರಾದರು. 1921ರಲ್ಲಿ ಈ ಪೀಠದ ಅಧಿಪತಿಗಳಾದರು. ಇವರ ಜ್ಞಾನ,

ಪ್ರತಿಭೆ, ಸಾತ್ವಿಕಸ್ವಭಾವಗಳು ಪುರಿಕ್ಷೇತ್ರದ ಗೋವರ್ಧನ ಮಠಾಧಿಕಾರಿಗಳಾದ ಶ್ರೀ ಶ್ರೀ ಮಧುಸೂದನತೀರ್ಥರ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದುವು. ಮಧುಸೂದನತೀರ್ಥರ ಆರೋಗ್ಯ ಕೆಡುತ್ತಾಬಂತು. ಭಾರತಿಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರನ್ನು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಂತೆ ಬಲಾತ್ಕರಿಸಿದರು. 1925ರಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರು ಪುರಿಕ್ಷೇತ್ರದ ಮಠಾಧೀಶರಾದರು.

ಸುಮಾರು 35 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಸನಾತನಧರ್ಮವನ್ನು ತಮ್ಮ ದಿವ್ಯವಾಣಿಯಿಂದ ದೇಶದಾದ್ಯಂತವೂ ಬೋಧಿಸಿದರು. "ಸನಾತನ ಧರ್ಮ" ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಇವರ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಬೊಂಬಾಯಿನ ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾಭವನದವರು ಪ್ರಕಟಿಸಿದ್ದಾರೆ. ವೇದಾಂತ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪ್ರಚಾರಮಾಡಿ ವಿಶ್ವಶಾಂತಿಗಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾ ಅಮೇರಿಕಾಕ್ಕೆ ಆಹ್ವಾನಿತರಾಗಿ 1958ರ ಫೆಬ್ರುವರಿಯಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕಕ್ಕೆ ತೆರಳಿದರು. ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯ ಮಠಾಧಿಪತಿಗಳೊಬ್ಬರು ಪರದೇಶಕ್ಕೆ ತೆರಳಿದುದು ಇದೇ ಮೊದಲು. ಆದರೆ 1958ನೆಯ ಮೇನಲ್ಲಿ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗಿದರು. ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳ ಒತ್ತಡದಿಂದ ಆರೋಗ್ಯ ಕೆಟ್ಟಿತು. 1959 ನೇ ನವಂಬರ್‌ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಧಿ ಉಲ್ಬಣವಾಯಿತು. 1960ನೇ ಫೆಬ್ರುವರಿ 2ರಲ್ಲಿ ಬೊಂಬಾಯಿನಲ್ಲಿ ಮಹಾಸಮಾಧಿಯನ್ನು ಪಡೆದರು.

ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಗಣಿತ. ಶೃಂಗೇರಿಯ ಸಮೀಪದ ಅರಣ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 8 ವರ್ಷ ಕಾಲ ತಪಸ್ಸುಗೈಯುತ್ತಾ ಅಥರ್ವವೇದದಲ್ಲಿರುವ ಹದಿನಾರು ಗಣಿತಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆದರಂತೆ. ಈ ಗಣಿತಸೂತ್ರಗಳು ಈಗಿರುವ ಅಥರ್ವವೇದಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ

ಪ್ರಾಯಶಃ ದೊರಕಲಾರವು. ಅಥರ್ವವೇದದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ವಿಷಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸ್ವಾಮಿಗಳೇ ತಮ್ಮ ಅಂತಃಚಕ್ಷುಸ್ಸಿನ ಬೆಳಕನ್ನು ಬೀರಿ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಶಿಷ್ಯೆಯೂ ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ನಾಗಪುರದ "ವಿಶ್ವಪುನರ್ನಿರ್ಮಾಣ ಸಂಘ"ದ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿನಿಯೂ ಆದ ಶ್ರೀಮತಿ ಮಂಜುಳಾ ತ್ರಿವೇದಿ ಅವರು ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಹದಿನಾರು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ಗಣಿತಗ್ರಂಥವನ್ನು ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಬರೆದರಂತೆ. ಒಂದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನೇಕ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗಗಳಿಗೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರು. ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಶಿಷ್ಯರೊಬ್ಬರ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆಂದೂ, ಎಲ್ಲವೂ ಕಳೆದುಹೋದುವೆಂದೂ ಶ್ರೀಮತಿ ತ್ರಿವೇದಿಯವರು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸ್ವಾಮಿಗಳಾದರೋ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ತೀವ್ರವಾಗಿ ದುಃಖಿಸದೇ, ತಮ್ಮ ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವೂ ಇರುವುದೆಂದೂ 16 ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತೆ ಬರೆಯುವುದಾಗಿಯೂ ತಿಳಿಸಿದರು. ಇದರಂತೆಯೇ ಅಮೆರಿಕಾದ ಪ್ರಯಾಣ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಮೇಲೆ, 1957ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಕೇವಲ ಒಂದೂವರೆ ತಿಂಗಳಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಮುಗಿಸಿದರು. ಉಳಿದ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ವಿಧಿ ಅಡ್ಡಬಂದಿತು. ಆರೋಗ್ಯ ಕೆಟ್ಟಿತು, ಎರಡೂ ಕಣ್ಣುಗಳಲ್ಲಿ ಅರಿ (cataract) ಆವರಿಸಿತು. ಸ್ವಾಮಿಗಳವರ ನೆನಪಿಗಾಗಿ, ಭಾರತದ ವೈದಿಕಜ್ಞಾನವು ಎಸಗಬಹುದಾದ ಮೋಜು (magic) ಎಂಬ ತೆರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗ್ರಂಥ ಮಾತ್ರ ಉಳಿದಿದೆ. ಕಾಶೀ ಹಿಂದೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದವರು ನೇಪಾಳ

ರಾಜ್ಯದ ಸಂಸ್ಕೃತ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು 1965ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು.

ಗ್ರಂಥದ ಅಂದವಾದ ಭಾಗಗಳ ತಿರುಳನ್ನು ಕನ್ನಡಿಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮತ್ತು ಇತರರ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

೨

ಸುಲಭ ಗುಣಾಕಾರ

೨-೧. ಸ್ವಾಮಿಗಳು ತಮ್ಮ (ಈಗ ಉಳಿದಿರುವ ಒಂದೇ) ಗ್ರಂಥದ ಮುನ್ನುಡಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ತಿಳಿಸಿರುತ್ತಾರೆ : ಸೂತ್ರಗಳು ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಾಖೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಧ್ಯಾಯಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ — ಅಂಕಗಣಿತ, ಬೀಜಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ, ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ (ಸಮತಳದ ಮತ್ತು ಗೋಳೀಯ), ಶಂಕುಜಗಳು, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ, ಇತ್ಯಾದಿ ಇತ್ಯಾದಿ. ಸೂತ್ರಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಎಟುಕದ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗವೇ ಇಲ್ಲ.

ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಬರೆದ ೧೬ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ೧೫ ಗ್ರಂಥಗಳು ನಮ್ಮ ಪಾಲಿಗೆ ಉಳಿಯಲಿಲ್ಲವಾಗಿ, ಈ ಹಿರಿಯ ಘೋಷಣೆಯ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುವಂತಿಲ್ಲ. ಉಳಿದಿರುವ ಈ ಒಂದೇ ಗ್ರಂಥವಲ್ಲೇನೋ ಇದನ್ನು ತಕ್ಕಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಸೂತ್ರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಅನ್ವಯವಾಗಬಲ್ಲುವು. ವಿಶೇಷಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ಸೂತ್ರಗಳು ಅಥವಾ ಉಪಸೂತ್ರಗಳು ಗಣಿತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೂ ಸುಲಭಗೊಳಿಸಬಲ್ಲುವು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುವೆವು. ವಿಧಾನಗಳ ಅಂದವನ್ನು ವಾಚಕರೇ ಸವಿಯಬಲ್ಲರು.

೨. ೨. (ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಉಳಿದಿರುವ) ಈ ಗ್ರಂಥಕ್ಕೆ ಮುಖ್ಯವಾದ ಆಧಾರಸೂತ್ರ :

ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಗುಣಾಕಾರ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೆ

ನಿಖಿಲಂ ನವತಶ್ಚರಮಂ ದಶತಃ

ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸೂತ್ರ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಸೂತ್ರಗಳ ಒಗಟು ನಾವು ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಕ್ರಮೇಣ ತಿಳಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

೨. ೩. ಸುಲಭ ಗುಣಾಕಾರಗಳು.

(೧) 9×7. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ 10ರಲ್ಲಿ, ಅಥವಾ 100ರಲ್ಲಿ, 1000ದಲ್ಲಿ ಕಳೆದು ಬಲಗಡೆ ಇಡುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $10-9=1$, $10-7=3$.

9	−1
7	−3
6	3

$9+7=16$, $16-10=6$.

ಈಗ ಎಡದಲ್ಲಿರುವ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ, ಮೊತ್ತದಿಂದ 10ನ್ನು (ಅಥವಾ 100ನ್ನು, 1000ನ್ನು) ಕಳೆದಿಡುತ್ತೇವೆ. ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿಡುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore 9 \times 7 = 63.$$

ಮೇಲಿನ 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, "ಅಡ್ಡ ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ" 9−3, ಅಥವಾ 7−1, ಪಡೆಯಬಹುದು. ಗುಣಾಕಾರದ ಚಿಹ್ನೆ × ಹೇಗೆ ಉದ್ಭವವಾಯಿತೆಂದು ಸ್ವಾಮಿಗಳು ತಿಳಿಸುತ್ತಾರೆ.

(೨) 8×6. ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ,

$$\begin{array}{cc} 8 & -2 \\ 6 & -4 \\ \hline 4 & 8 \end{array}$$

ಉತ್ತರ 48.

(14−10)

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಬಲಗಡೆಯ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಎಡಗಡೆಗೆ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾ :

(೩) 7×5.

$$\begin{array}{ccc} 7 & - & 3 \\ 5 & - & 5 \\ \hline 2 & & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

ಇಲ್ಲಿ 3×5=15 ನ್ನು $\underset{1}{5}$ ಎಂದು ಬರೆದು, 1ನ್ನು

ಎಡಗಡೆ ಬರುವ $7+5-10=12-10=2$ ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಎಂದರೆ $2+1=3$.

$\therefore$ ಗುಣಲಬ್ಧ 35.

(೪) ಹೀಗೆಯೇ, 6×5

6	-4
5	-5
1	0 (2)

$=30$.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$$(x-a)(x-b)=x(x-a-b)+ab$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ. x=ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ. ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ 10 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ (base) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ, 100, 1000 ಮುಂತಾದ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

(೫)			(೬)			(೭)		
	93	-7		89	-11		25	-75
	92	-8		95	-5		98	-2
	85	56		84	55		23	50 (1)
ಉತ್ತರ 8556			ಉತ್ತರ 8455			ಉತ್ತರ 2450		

ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 100.

(೮)

888	–112
998	–002
886	224

ಉತ್ತರ 886224

(೯)

988	–012
987	–013
975	156

ಉತ್ತರ 975156

ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 1000.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದು ಬಂದುದನ್ನು ಬಲಗಡೆ ಇಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. – ಚಿಹ್ನೆ ಕೇವಲ ಸ್ಥಳವಿರಾಮಕ್ಕಾಗಿ ಅಲ್ಲ, ಅದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯೇ. – × – = + ಎಂದೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೇವೆ.

(೧೦)

13	+3	13–10 = +3
12	+2	12–10 = +2
15	6	

(25–10=15) ಉತ್ತರ 156

(೧೧)

113	+13
106	+ 6
119	78

ಉತ್ತರ 11978

(೧೨)

19	+9
13	+3
22	7
	2

ಉತ್ತರ 247.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಪಡುವ ಸೂತ್ರ:

$$(x+a)(x+b)=x(x+a+b)+ab$$

ಎಡಗಡೆಯ ಮೊತ್ತವು ಅಡ್ಡಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ, ಹೇಗೆಂದರೆ $113+6=106+13=119$

$$19+3=13+9=22.$$

ಹೀಗೆಯೇ

(೧೩)	1014	+14		
	1005	+05		
	1019	070	ಉತ್ತರ	1019070

ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 1000 ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಲಗಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳಿರಬೇಕು, ಎಂದರೆ $14\times5=070$, 70 ಅಲ್ಲ. ಬಲಗಡೆ ಒಂದು +, ಒಂದು − ಬರಬಹುದು. $+\times-=-$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಲಗಡೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಉದಾ:

(೧೪)	107	+7		100
			100=99	
	93	−7		49
	100	(−49)	ಉತ್ತರ	99 51

(೧೫)	1026	+26		1022 000
	996	−04		104
	1022	(−104)	ಉತ್ತರ	1021 896

೨-೪. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿವೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತವಾದ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಅದರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತ್ಯ (multiple)ವನ್ನೋ, ಅಪವರ್ತನ (submultiple)ವನ್ನೋ ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ (working base) ವನ್ನಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಧಾನವು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವಿಶದವಾಗುತ್ತದೆ.

(೧೬) 41×41.

(*a*) 100 ನ್ನು "ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ" ವಾಗಿಯೂ, 50ನ್ನು "ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ" ವಾಗಿಯೂ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವೆವು.

$$100 \div 50 = 2.$$

ಈಗ, ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ

41	−9	(50−41=9)
41	−9	
32	81	

(82−50)

ಈಗ 32ನ್ನು 2ರಿಂದ (100÷50) ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$32 \div 2 = 16$ $\quad \therefore\ 41 \times 41 = 1681.$

(*b*) ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, 10 ನ್ನು ತಾತ್ವಿಕಮೂಲವಾಗಿಯೂ, 50 ನ್ನು ಕ್ರಿಯಾಮೂಲವಾಗಿಯೂ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. $50 = 10 \times 5$.

ಈಗ 41 −9

41 −9

32

(82−50)

×5 (50÷10)

160 1 $9 \times 9 = \underset{8}{1}$

8

ಉತ್ತರ 1681

ತಾತ್ವಿಕಮೂಲವಾದ 10ರಲ್ಲಿ ಎರಡೇ ಅಂಕಿಗಳಿರುವುದರಿಂದ, 9×9 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಇನ್ನೊಂದಾದ 8ನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಳ್ಳಬೇಕು.

(*c*) ಅಥವಾ, ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 10, ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ 40 ಆದರೆ,

41 +1

41 +1

(82−40)=42

×4 (40÷10)

168 1 ಉತ್ತರ 1681

(೧೭) 49×49.

(*a*) ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 100; ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ 50.

$$\begin{array}{rr} 49 & -1 \\ 49 & -1 \\ \hline (98-50)=48 & \\ \div 2 & (100\div 50=2) \\ \hline 24 & 01 \end{array}$$

($-1\times -1=01$, ಏಕೆಂದರೆ 100 ರಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳಿವೆ.

ಉತ್ತರ 2401

(*b*) ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 10; ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ 50

$$\begin{array}{rr} 49 & -1 \\ 49 & -1 \\ \hline 48 & \\ \times 5 & (50\div 10=5) \\ \hline 240 & 1 \end{array}$$

ಉತ್ತರ 2401

(೧೮) 299×296.

ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 100, ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ 300.

$$\begin{array}{rr} 299 & -1 \\ 296 & -4 \\ \hline 295 & \\ \times 3 & \\ \hline 885 & 04 \end{array}$$

ಉತ್ತರ 88504

(೧೯) 247×246.

ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 1000, ಕ್ರಿಯಾಮೂಲ 250.

$$\begin{array}{rrrl} & 247 & -3 & \\ & 246 & -4 & \\ \hline 493-250= & 243 & & \\ & \div 4 & & \\ \hline & 60\frac{3}{4} & 012 & =60750 \\ & & & 012 \\ \hline & & & 60762 \end{array}$$

ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಬಂದರೆ, ಈ ಕ್ರಮವನ್ನನುಸರಿಸ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

೨-೫. **ವರ್ಗೀಕರಣ.** ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರದ ನಿಯಮಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಬೇರೊಂದು ವಿಧಾನವು ಬಹಳ ಅಂದವಾಗಿದೆ. "ನಿಖಿಲಂ" ಸೂತ್ರ (೨·೨)ದ ಉಪಸೂತ್ರವಾಗಿ

ಯಾವದೂನಂ ತಾವದೂನೀಕೃತ್ಯ ವರ್ಗಂಚ ಯೋಜಯೇತ್

ಎಂದು ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಅರ್ಥವು ವಿಶದವಾಗುತ್ತದೆ.

(i) 9^2. ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 10ನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, 9 −1. ಇಲ್ಲಿ ಊನ(ಕಡಮೆ) 1. 9ರಲ್ಲಿ ಈ ಊನವನ್ನು

ಕಳೆದರೆ, $9-1=8$. ಇದಕ್ಕೆ ಊನದವರ್ಗ $1^2=1$ ಜೋಡಿಸಿ

$$9^2=81.$$

(ii) 7^2. ಊನ$=10-7=3$.

$7-3=4$. ಇದಕ್ಕೆ $3^2=9$ ಜೋಡಿಸಿ. $7^2=49$.

(iii) 6^2. ಊನ$=4$. $6-4=2$ ಆದರೆ $4^2=\underset{1}{6}$.

$$\therefore 6^2=2\,\underset{1}{6}=36$$

(iv) 11^2. ಇಲ್ಲಿ ಊನವಲ್ಲ, ಅಧಿಕ. $11\ \ +1$ ಕಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲು ಕೂಡಬೇಕು.

$11+1=12$. $(+1)^2=1$ $\therefore 11^2=121$.

(v) 14^2. $14\ \ +4$

$14+4=18$ $(+4)^2=\underset{1}{6}$

$14^2=18\ \underset{1}{6}=196$

(vi) 19^2 $19\ \ +9$.

$19^2=28\ \underset{8}{1}=361$

(vii) 97^2. ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 100.

$97\ \ -3$ $97-3=94$

$97^2=94\ 09=9409$.

(viii) 989^2. ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 1000.

989 −11 989−11=978

∴ 989^2=978121

(ix) 9989^2. ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 10000

9989 −11 ಉತ್ತರ 99780121.

(x) 9993^2.

9993 −7 ಉತ್ತರ 99860049.

(xi) 1007^2.

1000 +7 ಉತ್ತರ 1014049.

(xii) 1017^2.

1000 +17 ಉತ್ತರ 1034289.

(xiii) 775^2. ತಾತ್ವಿಕಮೂಲ 100 ಎಂದೂ, ಕ್ರಿಯಾ ಮೂಲ 800 ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

775 −25 775−25=750

750×8 ಇಲ್ಲಿ 8=800÷100

6000 25

6

600625 ಉತ್ತರ.

ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ತತ್ವ

$a^2=(a+b)(a-b)+b^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ವಾಚಕರು 18, 31, 67, 493 ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಕ್ರಿಯಾಮೂಲಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯಕವಾದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪಡೆಯಲಿ.

೨-೬. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 5 ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇರುವ ನಿಯಮವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿದೆ. ಉದಾ:

25^2. $2\times3=6$. ಇದರ ಮುಂದೆ $5^2=25$ ಇಡಿ.

$$25^2=625.$$

ಹೀಗೆಯೇ, $65^2=(6\times7)25=4225,$

$$95^2=(9\times10)25=9025,$$

$$125^2=(12\times13)25=15625.$$

ಸ್ವಾಮಿಗಳ ಗ್ರಂಥದ ಆಧಾರಸೂತ್ರವಾದ 'ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ' ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಅರ್ಥ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. 5ರ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸುವಿಕೆ. ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಗುಣಿಸಿ, 5^2 ಮುಂದಿಡುವುದೆಂದು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಉಪಸೂತ್ರವಾಗಿ "ಅಂತ್ಯಯೋರ್ದಶಕೇऽಪಿ" ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 10 ಆಗಿ, ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಂತೆಯೇ ಗುಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ: (i) 96×94. ಇಲ್ಲಿ $6+4=10$.

$\therefore$ ಉತ್ತರ$=(9\times10)(6\times4)=9024.$

(ii) $77 \times 73 = (7 \times 8)21 = 5621$

(iii) $88 \times 82 = 7216$

(iv) $123 \times 127 = 15621$

ಕಡೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆದಾಗ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 1000 ಆದಾಗ, ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಎಚ್ಚರಿಕೆಗಳಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು :

ಉದಾ : (i) 192×108. ಇಲ್ಲಿ $92 + 08 = 100$

$(1 \times 2) = 2$, $92 \times 08 = 0736$ ಉತ್ತರ 20736

(ii) $787 \times 713 = (56).(87 \times 13) = 561131$

(iii) $596 \times 504 = (30)(0384) = 300384$.

೨. ೭. 9, 99, 999 ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸುವಿಕೆ.

ಇದಕ್ಕೆ ಉಪಸೂತ್ರ: " ಏಕನ್ಯೂನೇನ ಪೂರ್ವೇಣ ". ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ಎಂದರೆ ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸೂತ್ರದ ಅರ್ಥ : ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಳೆಯಿರಿ. ಹೀಗೆ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

ಉದಾ : 12×99. $12 - 1 = 11$, $99 - 11 = 88$.

ಉತ್ತರ 1188.

$17 \times 99 = 1683$. $17 - 1 = 16$, $99 - 16 = 83$.

$658 \times 999 = 657342$

$658 - 1 = 657, \quad 999 - 657 = 342$

$314586 \times 999,999 = 314587,685412.$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಿಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಿಗಳು ಕಡಮೆ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಹಿಂಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನಿಟ್ಟು ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾ : $678 \times 99999 = 00678 \times 99999$

$= 0067799322$

$85 \times 999999 = 000084999915$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿದ್ದಾಗ, ಆಚರಿಸುವ ಕ್ರಮ :

(i) ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ. ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

(ii) ಬಲಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'ನಿಖಿಲಂ' ಕ್ರಮದಂತೆ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

(i) ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಲಗಡೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಿಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) 12×9. 12 ನ್ನು $1|2$ ಎಂದುಬರೆಯಿರಿ. ಎಡಗಡೆ 1ಕ್ಕೆ 1 ಸೇರಿಸಿ $1+1=2$. $12-2=10$. ಬಲಗಡೆಯ 2ನ್ನು 10 ರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

$$\therefore \quad 12 \times 9 = 108.$$

ಹೀಗೆಯೇ 26×9. $2|6$. $26-(2+1)=23$

$10-6 \quad =4$

$$\therefore 26 \times 9 = 234$$

78×9 $7|8$. $78-(7+1)=70$

$10-8 \quad =2$

$78 \times 9 = 702.$

(ii) 137×9. $13|7$ $137-(13+1)=123$

$=1233$ $10-7 \quad =3$

(iii) 7687×99. $76|87$ $7687-77=7610$

ಉತ್ತರ$=761013$ $100-87=13$

(iv) 1234567×9999.

$123|4567$ $1234567-124$

$=1234443$

$10000-4567$

$=5433$

ಉತ್ತರ$=12344435433$.

೨. ೮. ಇದುವರೆಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ನಿಯಮಾವಳಿಗಳಿಂದ, ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ, ನೇರವಾದ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಮದ ಶ್ರಮವೂ ತಪ್ಪುವುದು, ಬಹಳಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಾಲ ಉಳಿತಾಯ ವಾಗುವುದು.

ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಊರ್ಧ್ವತಿ-ರ್ಯಗ್ಭ್ಯಾಂ" ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಕೆಳಗೆ ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಸೂತ್ರದ ಅರ್ಥ: ಮೇಲಕ್ಕೆ, ಅಕ್ಕಪಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ.

ತತ್ವತಃ, ಈ ಸೂತ್ರವು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ

$$(ax+b)(cx+d),\ (ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$$

ಮುಂತಾದ ಬಹುಪದಿಗಳ (polynomials) ಗುಣಾಕಾರದ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಗ್ರಂಥದ ಧ್ಯೇಯವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಕೆಲವೇ ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಕ್ರಮವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: 18×11 1 8
1 1

ಎಡಅಂಕಿಗಳಾದ 1ನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ 1ನ್ನು ಇಡುತ್ತೇವೆ.
1 (ಊರ್ಧ್ವ)

ಈಗ ಅಡ್ಡಲಾಗಿ $1\times1=1$, $8\times1=8$. $1+8=9$
(ತಿರ್ಯಕ್)

ಪುನಃ 8 $=8$ ಊರ್ಧ್ವ
1 ಉತ್ತರ 198.

ಯಾವ ಹಂತದಲ್ಲಾಗಲಿ, ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ, ಬಲಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬರೆದು, ಉಳಿದುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: (i) 45×47

4	5	
4	7	
16	8	5
4	3	
21	1	5

$(4\times7)+(4\times5)=48$. 8 ನ್ನು ಬರೆದು 4 ನ್ನು 16ರ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ $5\times7=35$. 5ನ್ನು ಬರೆದು 3ನ್ನು 8ರ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉತ್ತರ: 2115.

(ii) 368×275

3	6	8
2	7	5

$3\times2=6$; $(3\times7)+(2\times6)=\underset{3}{3}$

$(3\times5)+(6\times7)+(8\times2)=$ 3
7

$(6\times5)+(8\times7)=$ 6
8

$8\times5=$ 0
4

ಆದ್ದರಿಂದ, $368\times275=$ 6 3 3 6 0
3 7 8 4

ಉತ್ತರ: 10 1 2 0 0

ಇನ್ನೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ, ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೇ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಘನೀಕರಣ (cubing)

೩. ೧. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 13^3ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ.

(i) 13^3.

1	3	9	27
	6	18	
2	1	9	7

ವಿವರಣೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕಿ 1ರ ಘನ=1. ಇದನ್ನು 3 : 1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ, ಬಂದುದನ್ನು ಪುನಃ, ಬಂದುದನ್ನು ಪುನಃ ಹೀಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಕೂಡುತ್ತೇವೆ. ಬಲಗಡೆಯಿರುವ 2ನ್ನು ಹಿಂದಿನ ನೀಟುಸಾಲಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. $2+8+9=19$. $1+1=2$ನ್ನು ಹಿಂದಿನ ನೀಟು ಸಾಲಿಗೆ ಒಯ್ಯುತ್ತೇವೆ.

$$13^3=2197.$$

(ii) 23^3.

8	12	18	27
	24	36	
12	1	6	7

ವಿವರಣೆ: $2^3=8$. $8\times\frac{3}{2}=12$, $12\times\frac{3}{2}=18$, $18\times\frac{3}{2}=27$.

$$2+6+8=(1)6.$$
$$1+3+1+4+2=(1)1.$$
$$1+2+1+8=12.$$

$23^3=12167$.

(iii) 32^3.

$$\begin{array}{cccc} 27 & 18 & 12 & 8 \\ & 36 & 24 & \\ \hline 32 & 7 & 6 & 8 \end{array}$$

$32^3=32768$.

ಹೀಗೆಯೇ ಇತರ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ತತ್ವ:

$$\begin{array}{ccccc} (a+b)^3 & a^3 & a^3\left(\frac{b}{a}\right) & a^2b\left(\frac{b}{a}\right) & ab^2\left(\frac{b}{a}\right) \\ & & 2a^2b & 2ab^2 & \\ \hline & a^3 & 3a^2b & 3ab^2 & b^3 \end{array}$$

b ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗಲೂ, ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾ:

(iv) $98^3=(100-2)^3$.

$$\begin{array}{cccc} 100,00,00 & -20000 & 400 & -8 \\ & -40000 & 800 & \\ \hline 100,00,00 & -60000 & 1200 & -8 \end{array}$$

$$98^3 = \begin{array}{r} 1001200 \\ -60008 \\ \hline 941192 \end{array}$$

(v) $69^3=(70-1)^3$.

$$\begin{array}{rrrr} 343,000 & -4900 & 70 & -1 \\ & -9800 & 140 & \\ \hline 343210 & & & \\ -\ 14701 & & & \\ \hline 328509. & & & \end{array}$$

ಬೀಜಗಣಿತದ ಸುಲಭ ಪಾಠಗಳನ್ನರಿತಿರುವವರಿಗೆ, ತತ್ವದಲ್ಲಿ ಹೊಸದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುವವರು ವಿರಳ.

೩. ೨ ಬೇರೊಂದು ವಿಧಾನ. ಯಾವದೂನಂ ಸೂತ್ರ

ಉದಾ: (vi) 104^3. ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 100ನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು,

$104 = 100 + 4$. ಊನಂ $= +4$

100ಕ್ಕೆ 3×4 ಸೇರಿಸಿ 112 ಇಡುತ್ತೇವೆ.

ಇದರ ಮುಂದೆ ಹೀಗೆ ಬಂದ 12ನ್ನು 4ರಿಂದ (ಊನದಿಂದ) ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ 48 ಇಡುತ್ತೇವೆ.

ಕಡೆಯಲ್ಲಿ $4^3=64$ ಇಡುತ್ತೇವೆ.

$\therefore 104^3 = 1124864$.

ಹೀಗೆಯೇ

(vii) 103^3. $100+3$

$\therefore\ 103^3 = 109\ 27\ 27$.

(viii) $1006^3 = 1018\ 108\ 216$.

(ix) $10005^3 = 10015\ 0075\ 0125$.

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಉತ್ತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಿಗಳಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಸೂಕ್ತವಾದ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಇಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

೩. ೩. ಚತುಷ್ಘಾತ.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ಆದ್ದರಿಂದ 11^4ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಹೀಗೆ ಆಚರಿಸ ಬಹುದು.

1	1	1	1	1
	3	5	3	
1	4	6	4	1

$$1^4,\quad 1^4.\tfrac{1}{1},\quad 1^3.\tfrac{1}{1},\quad 1^2.\tfrac{1}{1},\quad 1.\tfrac{1}{1}$$

ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 3, 5, 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\therefore\ 11^4 = 14641.$$

ಹೀಗೆಯೇ,

12^4.	1	2	4	8	16
		6	20	24	
	2	0	7	3	6

$12^4 = 20736$.

32^4.	81	54	36	24	16
		162	180	72	
	104	8	5	7	6

$32^4 = 1048576$.

ಕೇವಲ ಸುಲಭವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ

೪. ೧. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂತರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ Nನ್ನು ab ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಮೇಲಣ ವರ್ಗಗಳು ಒಡನೆಯೆ ದೊರಕುತ್ತವೆ. N ನಿರಪವರ್ತಕವಾದರೆ $b=1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) $13=13\times 1,\ a=13,\ b=1$
$=7^2-6^3.$

(ii) $48=6\times 8=16\times 3=12\times 4$
$=24\times 2=48\times 1$

$\therefore\ 48=7^2-1^2=9\frac{1}{2}^2-6\frac{1}{2}^2=8^2-4^2$
$=13^2-11^2=24\frac{1}{2}^2-23\frac{1}{2}^2.$

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನೂ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರೆ, ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅನಂತ ವಿಧದಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದು.

ಉದಾ: $15=3\times 5=2\times 7\frac{1}{2}=10\times 1\frac{1}{2}$
$=4^2-1^2=4\frac{3}{4}^2-2\frac{3}{4}^2=5\frac{3}{4}^2-4\frac{1}{4}^2,$

ಇತ್ಯಾದಿ.

೪. ೨. ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವೂ ಅಲ್ಲ

$$1\tfrac{1}{3},\quad 2\tfrac{2}{5},\quad 3\tfrac{3}{7},\quad 4\tfrac{4}{9},\quad 5\tfrac{5}{11},$$

ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಸಂಯುಕ್ತಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶವು ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಅಂಶದ ಇಮ್ಮಡಿಗೆ ಒಂದು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಛೇದವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕರೂಪ $n+\dfrac{n}{2n+1}$. ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ತೆಗೆದು, ಮಿಶ್ರ (improper) ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆದರೆ ಇವು $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{40}{9}$, $\frac{60}{11}$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಈಗ ಅಂಶದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಛೇದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. $4^2+3^2=5^2$, $12^2+5^2=13^2$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ,

$$N=n(2n+1)+n=2n(n+1)$$
$$D=2n+1$$

$$N^2+D^2=(N+1)^2.$$

ಉದಾ: $n=17,\quad N=612,\quad D=35.$

$$612^2+35^2=613^2.$$

ಮೇಲಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು

$$D^2=(N+1)^2-N^2=N+(N+1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಅಸಮ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ (consecutive) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$D^2=4n^2+4n+1.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $N=\frac{1}{2}(D^2-1)$.

ಉದಾ : $9^2=40+41$

$$35^2=1225=612+613$$

$$47^2=2209=1104+1105.$$

[ಟಿಪ್ಪಣಿ : $c^2=a^2+b^2$ ಆಗುವಂತಹ a, b, c ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಸಮಕೋಣ ತ್ರಿಭುಜ (right-angled triangle)ವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. a, b, c ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಉತ್ತರ: $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$. ಇಲ್ಲಿ m, n ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು ಕ್ರಿ. ಶ. ೬೨೮ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟನು. ಗ್ರೀಕರ ಪೈಥಾಗೊರಾಸನು $a=2n+1$, $b=2n^2+2n$, $c=2n^2+2n+1$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟನು. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವು 1 ಆಗಿ, ಈ ಉತ್ತರವು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ಉತ್ತರದ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭ ಮಾತ್ರ ಆಗುತ್ತದೆ. ಪೈಥಾಗೊರಾಸನ ಉತ್ತರವೇ ಮೇಲೆ ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ $D^2+N^2=(N+1)^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ.

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀ]

ಭಾಗಿಸದೆಯೇ ಭಾಗಹಾರ

೫. ೧. ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಮವು ಶ್ರಮಯುತವೂ ಅಂದರಹಿತವೂ ಆದುದು ಎನ್ನುತ್ತಾ, ಸ್ವಾಮಿಗಳು ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿರುತ್ತಾರೆ: (೧) "ನಿಖಿಲಂ" ವಿಧಾನ (೨. ೨ ರಲ್ಲಿರುವ ಸೂತ್ರ), (೨) ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಸೂತ್ರ, (೩) ಊರ್ಧ್ವತಿರ್ಯಕ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಯೋಗ. ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವೆಂದೂ, ಮೂರನೆಯ ವಿಧಾನವು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧ್ಯವೆಂದೂ ವೇದದ ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ತಿಲಕಪ್ರಾಯವಾದುದೆಂದೂ ಕೊಂಡಾಡಿದ್ದಾರೆ. ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕೆಲವೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಮುಂದಿಡುವೆವು.

ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ತತ್ವ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಯುಕ್ತ ಭಾಗಹಾರ (synthetic division)ದ ತತ್ವ. ಕೆಲವೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ತಿಳಿಸುವೆವು.

x^3-4x^2+6x+7ನ್ನು $x-3$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. xನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ, ಗುಣಕಗಳನ್ನು (coefficients) ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವೆವು. ಎಡಗಡೆಯ -3ಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ $+3$ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

	1	−4	6	7
3		3	−3	9
	1	−1	3	16

ವಿವರಣೆ : ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕ 1ನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಎರಡನೆಯ ಅಂಕದ ಕೆಳಗಡೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೂಡಿದರೆ, −1 ಬಂತು. ಇದನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮೂರನೆಯ ಅಂಕದ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿದೆ. ಕೂಡಿದರೆ 3 ಬಂತು. $3 \times 3 = 9$ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಂಕದ ಕೆಳಗೆ. ಮೊತ್ತ 16.

ಭಾಗಲಬ್ಧ x^2-x+3; ಶೇಷ 16.

ಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪದಗಳಿದ್ದರೂ ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು :

ಉದಾ : $6x^4+7x^3+4x^2-5x+13 \div x^2-2x-7$.

ಭಾಜಕದ ಎರಡನೆಯ, ಮೂರನೆಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವೆವು.

		6	7	4	−5	13
2	7		12	42		
				38	133	
					168	588
		6	19	84	296	601

ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕಿ 6ರಿಂದ ಎಡಗಡೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. $7+12=19$. ಎಡಗಡೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಇದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. $4+42+38=84$. ಎಡಗಡೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು 84ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸಾಲು ಬಂದಿದೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ : $6x^2+19x+84$.

ಶೇಷ : $296x+601$.

ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿಗಳ ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಮವೇ ಇಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವುದು. ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಅನವಶ್ಯಕ. ಆದರೆ, ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಗುಣಕ 1 ಆಗಿರದೆ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ ಭಾಜಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಭಾಗಿಸಿ, ಕಡೆಗೆ ಬಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಪುನಃ ಈ ಗುಣಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಶೇಷವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ: $3x^2-2x+4 \div 3x-5$

$$3 \,\big|\, 3x-5 \quad\Rightarrow\quad x-\frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{5}{3} & 3 & -2 & 4 \\
 & & 5 & 5 \\
\hline
 & 3 \,|\, 3 & 3 & 9 \\
 & 1 & 1 & \\
\end{array}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ: $x+1$, ಶೇಷ: 9.

೫. ೨. "ನಿಖಿಲಂ" ವಿಧಾನ: ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(೧) $215 \div 9$. ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 10 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $10-9=1$ ಇದನ್ನು "ಊನ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವಷ್ಟು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಬೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಭಾಜಕ 9ರ ಕೆಳಗೆ ಊನವನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

9	)	2	1	5
1			2	3
		2	3	8

ವಿವರಣೆ: $1 \times 2 = 2$ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

$1+2=3.$

3×1(ಊನ)$=3$ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. $5+3=8$

ಭಾಗಲಬ್ಧ 23, ಶೇಷ 8.

(೨) $124 \div 78$

ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 100; ಊನ 22.

78	)	1	24
22			22
		1	46

ಭಾಗಲಬ್ಧ 1; ಶೇಷ 46.

(೩) 34561 ÷ 8867.

ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ 10000.

ಊನ 10000 − 8867 = 1133.

8867)	3	4561
1133		3399
	3	7960

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 3, ಶೇಷ 7960.

(೪) 12320 ÷ 9.

9)	1232	0
1	136	8
	1368	8

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 1368, ಶೇಷ 8.

(೫) 1223 ÷ 89.

89)	1	2	23
ಊನ 11		1	1
			33
	1	3	66

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 13, ಶೇಷ 66.

ಕೊಡುವಾಗ ಭಾಜಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿ ಭಾಜಕವೇ ಆಗಲಿ ಬರಬಹುದು. ಶೇಷದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬಂದರೆ, ಬಂದ ಶೇಷವನ್ನು ಪುನಃ ಅದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

(೬) 238÷9.

9)	23	8	
1	2	5	
	25	1	3
			1
		1	4

ಬಂದ ಶೇಷ 13ನ್ನು ಮತ್ತೆ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 25+1=26, ಶೇಷ 4.

(೭) 34168÷9.

9)	3416	8	
1	378	14	
	3784	2	2
	1		2
		2	4

ಇಲ್ಲಿ 6+8=14 (ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ). 4ನ್ನು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದು, 1ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆದು ಹಿಂದಣ ಅಂಕಿಗೆ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಶೇಷ 22ನ್ನು ಮತ್ತೆ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

ಭಾಗಲಬ್ಧ : 3794+2=3796, ಶೇಷ : 4.

೫. ೩. ಇವು ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಸಮಯೋಚಿತವಾದ ಉಪಾಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(ಅ) 2341÷819.

8 1 9)	2	|	3	4	1
ಊನ 1 8 1		|	2	6	2
		|		1	
	2	|	7	0	3

ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ 181=200−20+1 ಆದುದರಿಂದ 181ನ್ನು 2(−2)1 ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಎಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಈಗ

8 1 9)	2	|	3	4	1
ಊನ 2 −2 1		|	4	−4	2
	2	|	7	0	3

ಭಾಗಲಬ್ಧ 2, ಶೇಷ 703.

(೯) 43999 ÷ 828.

828)	43		9	9	9
172	4		28	8	
			7	49	14
	47	5	0	8	3
			5	35	10
		5	9	35	3

ಭಾಗಲಬ್ಧ : 47 + 5 = 52,

ಶೇಷ : 943 = 828 + 115.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಗಲಬ್ಧ 53, ಶೇಷ 115.

(೧೦) 4771 ÷ 818.

818)	4		7	7	1
182			4	32	8
	4	1	4	9	9
			1	8	2
		1	6	8	1

ಭಾಗಲಬ್ಧ 4 + 1 = 5, ಶೇಷ 681.

ಅಥವಾ 182=2 −2 2.

8 1 8	4	7	71
2 −2 2		8	−88
	4	15	−19

ಬಂದ ಶೇಷ = 15 −19 (150−1=149)

= 1499.

ಮುಂದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ.

(೧೧) 21999÷8819.

ಊನ = 1181=1 2 −2 1

1 2 −2 1	2	1	9	9	9
		2	4	−4	2
	2	4	3	6	1

ಭಾಗಲಬ್ಧ 2, ಶೇಷ 4361.

(೧೨) 4009÷882. ಊನ=118=12 −2

1 2 −2	4	0	0	9
		4	8	−8
	4	4	8	1

ಭಾಗಲಬ್ಧ 4, ಶೇಷ 481.

೫. ೪. ಮೇಲಣ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಆಧುನಿಕ ಭಾಗಹಾರದ ಕ್ರಮವಾಗಲಿ ದೊಡ್ಡಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನವಾಗಲಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಪರಾವರ್ತ್ಯವೆಂಬ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುವೆವು. ಇದೂ ಸಹ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ವಿಧಾನವಲ್ಲ. ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಗೆ ವರ್ಗಾಯಿಸುವಾಗ, ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಂಯುಕ್ತ ಭಾಗಹಾರ (೫. ೧.) ದಲ್ಲಿ ಭಾಜಕದ ಗುಣಕಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

(೧) $3466 \div 123.$

$$3466 = 3x^3 + 4x^2 + 6x + 6$$

ಮತ್ತು $\quad 123 = x^2 + 2x + 3\,;$

ಇಲ್ಲಿ $x = 10$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಯುಕ್ತ ಭಾಗಹಾರದ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 6 \\
 & -2 & -3 & & -6 & -9 & 6 \\
 & & & & & 4 & \\
\hline
 & & & 3 & -2 & 1 & 2 \\
 & & & & & & {}_{1}
\end{array}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ$=3-2=30-2=28$, ಶೇಷ$=22$.

(೨) 344548 ÷ 1232.

$$\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 8 \\
 & -2 & -3 & -2 & & & & & & \\
 & & & & & -6 & -9 & -6 & & \\
 & & & & & & 4 & 6 & 4 & \\
 & & & & & & & 2 & 3 & 2 \\
\hline
 & & & & 3 & -2 & -1 & 7 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & {}_1 & {}_1
\end{array}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ $= 3\ \ -2\ \ -1$ ಅಥವಾ $300 - 21 = 279$,

ಶೇಷ $7\ 1\ 0 = 820$.
$\quad\ \ {}_1\ {}_1$

(೩) 24227 ÷ 1132.

$$\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 7 \\
 & -1 & -3 & -2 & & & & & \\
 & & & & & -2 & -6 & -4 & \\
 & & & & & & -2 & -6 & -4 \\
\hline
 & & & & 2 & 2 & -6 & -8 & 3
\end{array}$$

ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $= 22$, ಶೇಷ $= -6\ -8\ +3$, ಎಂದರೆ -677 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧ $= 21$, ಶೇಷ $= 1 \times 1132 - 677 = 455$.

(೪) 39166 ÷ 9718.

$9718 = 10000 - 300 + 20 - 2 = 1\ 0\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}$.

ಇಲ್ಲಿ $\bar{3}$ ಎಂದರೆ -3. ಆದ್ದರಿಂದ

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \bar{3} & 2 & \bar{2} & 3 & 9 & 1 & 6 & 6 \\
 & 0 & 3 & -2 & 2 & & 0 & 9 & -6 & 6 \\
\hline
 & & & & & 3 & 9 & 0 & 0 & 2 \\
 & & & & & & & 1 & & 1
\end{array}
$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ 3, ಶೇಷ 10012. ಇದು ಭಾಜಕದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾದ್ದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಮತ್ತೆ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$$
\begin{array}{cccc|ccccc}
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 3 & -2 & 2 & & 0 & 3 & -2 & 2 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 3 & \bar{1} & 4
\end{array}
$$

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ : $3+1=4$,

ಶೇಷ : $3\,\bar{1}\,4 = 294$.

೫. ೫. ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಅಂಕೆ 1 ಅಲ್ಲದಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(೧) $26999 \div 224$.

$$
\begin{array}{c|c}
2 & 224 \\
\hline
 & 112
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ & -1 & -2 & & -2 & -4 & & \\ & & & & & -4 & -8 & \\ \hline & & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ & & & 1 & 2 & & & \end{array}$$

ಉತ್ತರ: ಭಾಗಲಬ್ಧ 120, ಶೇಷ 119.

(೨) 26999 ÷ 448.

$$4 \,|\, \underline{4\ 4\ 8}$$
$$1\ 1\ 2$$

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ $4 \,|\, \underline{2\ 4}\ 1\ 1\ 9$

$$6$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 60, ಶೇಷ: 119.

(೩) 1600 ÷ 199.

$$199 = 2\ 0\ -1.$$

$$2 \,|\, \underline{2 \quad 0 \quad -1}$$
$$1 \quad 0 \quad -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1\ 0\ -\tfrac{1}{2} & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0\ \ \tfrac{1}{2} & & 0 & \tfrac{1}{2} & \\ & & & 0 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 6 & \tfrac{1}{2} & 3 \\ & & 8 & & \end{array}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ 8, ಶೇಷ $\frac{1}{2}+3$.

ಇಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 10=5$. $\therefore$ ಶೇಷ 8.

(೪) $1489 \div 225$.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2\ 2\ 5 \\ \hline & 1\ 1\ 2\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 11\ \ 2\tfrac{1}{2} & 1 & 4 & 8 & 9 \\ -1\ -2\tfrac{1}{2} & & -1 & -2\tfrac{1}{2} & \\ & & & -3 & -7\tfrac{1}{2} \\ \hline 2 & 1 & 3 & 2\tfrac{1}{2} & 1\tfrac{1}{2} \\ & & 6\tfrac{1}{2} & & \end{array}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ $=6\frac{1}{2}$ ಎಂದರೆ $6+\frac{1}{2}(225)$.

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ : 6.

ಶೇಷ : $\frac{1}{2}(225)+2\frac{1}{2}(10)+1\frac{1}{2}$

$=112\frac{1}{2}+25+1\frac{1}{2}=139$.

೫. ೬. “ ಊರ್ಧ್ವತಿರ್ಯಕ್ ” ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಯೋಗ (ಮೇಲೆ ಕೆಳಗೆ ಹಾಗೂ ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ).

ಉದಾಹರಣೆ. 47839 ÷ 82.

2	4	7	8	3	9
			/	/	/
8			7	4	3
		5	8	3	

ವಿಧಾನ : ಭಾಜಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕಿಯಾದ 8ನ್ನು ಕೆಳಗಡೆಯೂ, ಎರಡನೆಯ ಅಂಕಿ 2ನ್ನು ಅದರ ಮೇಲ್ಗಡೆಯೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. 47 ನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಲಬ್ಧ 5 ನ್ನು ಕೆಳಗೂ, ಶೇಷ 7ನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 8ರ ಎಡಕ್ಕೂ ಇಡುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಬಂದ 78ರಲ್ಲಿ (7 / 8 ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ) 2×5 ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. (2 ಭಾಜಕದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ, 5 ಈಗ ಬಂದ ಲಬ್ಧ). $78 - 10 = 68$. ಇದನ್ನು 8ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ 8 ಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೆಳಗೂ, ಶೇಷ 4ನ್ನು 3ರ ಎಡಕ್ಕೆ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯೂ ಇಡುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಬಂದ 43ರಲ್ಲಿ 2×8 ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. $43 - 16 = 27$. ಇದನ್ನು 8ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಲಬ್ಧ 3 ನ್ನು ಕೆಳಗೂ, ಶೇಷ 3 ನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯೂ ಇಡುತ್ತೇವೆ. ಬಂದ 39 ರಲ್ಲಿ 2×3 ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. $39 - 6 = 33$ ಇದು ಶೇಷ. ಭಾಗಲಬ್ಧ 583.

ವಿಧಾನದ ತತ್ವವು ಬೀಜಗಣಿತದಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. $47839 = 47x^3 + 8x^2 + 3x + 9.$ $82 = 8x + 2,\ x = 10.$ ಬಹುಪದಿಯ ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಮವೇ ಮೇಲಣ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಸ್ವಲ್ಪ ಅಭ್ಯಾಸವಾದ ಮೇಲೆ, ವಿಧಾನವನ್ನು ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಆಚರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(೧) $69562 \div 57.$

7	6	9	5	6	2
					/
5		1	2	1	2
	1	2	2	0	

ವಿವರಣೆ: $6 \div 5 =$ ಲಬ್ಧ 1, ಶೇಷ 1

$19 - 7 \times 1 = 12.$ $12 \div 5$ 2 ಶೇ. 2.

$25 - 7 \times 2 = 11.$ $11 \div 5$ 2 ಶೇ. 1.

$16 - 7 \times 2 = 02$ 0 ಶೇ. 2.

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 12 20, ಶೇಷ 22.

(೨) 4396 ÷ 67.

7	4	3	9	6
6		7	7	
		6	5	

ಇಲ್ಲಿ 43 ÷ 6 ಭಾಗಲಬ್ಧ 7ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಬರುವ 19ರಲ್ಲಿ 7 × 6 ಕಳೆದರೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 43 ÷ 6 ಎಂಬುದನ್ನು 6 ಭಾಗಲಬ್ಧ, 7 ಶೇಷ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ 79 − 7 × 6 = 37. 37 ÷ 6ನ್ನು 5 ಭಾಗಲಬ್ಧ, 7 ಶೇಷವೆಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಈಗ 76 − 7 × 5 = 41.

ಭಾಗಲಬ್ಧ 65, ಶೇಷ 41.

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

(೩) 506217 ÷ 79. ಭಾಗಿಸುವಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಡಮೆ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ═ ಗುರ್ತುಮಾಡಿದೆ.

9	50	6	2	1	7
7		8	4	6	12
	$\underline{\underline{6}}$	4	0	$\underline{\underline{7}}$	

$$86 - 9 \times 6 = 32$$

$$42 - 36 = 06$$

$$61 - 0 = 61$$

$127 - 9 \times 7 = 64 =$ ಶೇಷ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ 6407, ಶೇಷ 64.

(೪) $38071 \div 48$.

8	38		0	7	1
4		10	8	3	7
	7		9	3	

ಇಲ್ಲಿ $38 \div 4 = 7$ ಭಾಗಲಬ್ಧ + 10 ಶೇಷ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$$100 - 8 \times 7 = 44$$

$44 \div 4 = 9$ ಲಬ್ಧ + 8 ಶೇಷ

$$87 - 72 = 15$$

$15 \div 4 = 3$ ಲಬ್ಧ, 3 ಶೇಷ

$$31 - 24 = 7.$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ: 793, ಶೇಷ: 7.

(೫) 9876÷127.

7	98	7	6	
12		14	14	97
	7	7		

ಭಾಗಲಬ್ಧ : 77, 97.

೫. ೭. ಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆಗಳಿದ್ದಾಗ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(೧) 7254869÷834.

ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಆಚರಿಸುತ್ತಾ, ಭಾಜಕದ ಮೊದಲನೇ ಅಂಕಿ 8ನ್ನು ಎಡಗಡೆ ಕೆಳಗೂ ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಾದ 34ನ್ನು ಮೇಲೂ ಇಡುತ್ತೇವೆ.

34	72	5	4	8	6	9
8		8	13	12	13	
	8	6	9	8		

ಈಗ 72÷8 = ಲಬ್ಧ, 8 ಶೇಷ.

ಬಂದ 85ರಲ್ಲಿ 3×8 ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

3 ಮೇಲಿನ ಮೊದಲ ಅಂಕಿ.

8 ಮೇಲೆ ಬಂದ ಲಬ್ಧ. 85−24=61.

61÷8 = 6 ಲಬ್ಧ, 13 ಶೇಷ.

134ರಲ್ಲಿ $\begin{pmatrix} 3 & & 4 \\ & \times & \\ 8 & & 6 \end{pmatrix}$ ಕರ್ಣಗಳ ಮೂಲಕ ಗುಣಿಸಿ ಕಳೆಯಬೇಕು.

= “ ತಿರ್ಯಕ್ ” ಕ್ರಮ, $134-(18+32)=84$

$84 \div 8 = 9$ ಲಬ್ಧ, 12 ಶೇಷ

$$128-\begin{pmatrix} 3 & & 4 \\ & \times & \\ 6 & & 9 \end{pmatrix}=128-(27+24)=27$$

$77 \div 8 = 8$ ಲಬ್ಧ, 13 ಶೇಷ

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 4 ಅಂಕಿಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, “ ಭಾಗಹಾರ ” ಕ್ರಮವು ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಶೇಷ $=1369-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}\times 10-(4\times 8)$

$=1369-600-32=737.$

(೨) $456789 \div 1458.$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಿಗಳಿರುತ್ತವೆ;

58	45	6	7	8	9
14		3	7	6	
	3	1	3		

$45 \div 14$ = 3 ಲಬ್ಧ, 3 ಶೇಷ

$36 - 5\times3 = 21$

$21 \div 14$ = 1 ಲಬ್ಧ, 7 ಶೇಷ

$$77 - \begin{pmatrix}5 & 8\\ 3 & 1\end{pmatrix} = 48$$

$48 \div 14$ = 3 ಲಬ್ಧ, 6 ಶೇಷ.

ದತ್ತಪ್ರಶ್ನೆಗೆ,

ಭಾಗಲಬ್ಧ 313,

ಶೇಷ $= 689 - \begin{pmatrix}5 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}\times10 - (8\times3)$

$= 689 - 230 - 24$

$= 435.$

(೩) $247349 \div 5648.$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 2 ಅಂಕಿಗಳಿರುತ್ತವೆ.

$$\begin{array}{r|ccccc} 648 & 24 & 7 & 3 & 4 & 9\\ 5 & & 4 & 8 & & \\ \hline & 4 & 3 & & & \end{array}$$

$47 - 6\times4 = 23.$

ಭಾಗಲಬ್ಧ 43,

ಶೇಷ $8349 - \begin{pmatrix}6 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix} \times 100 - \begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & 3\end{pmatrix} \times 10 - (8 \times 3)$

$= 8349 - 3400 - 440 - 24 = 4485.$

(೪) $868324 \div 23765.$

765	86	8	3	: 24
23		17	19	
	3	6		

$86 \div 23 = 3$ ಲಬ್ಧ, 17 ಶೇಷ

$178 - 7 \times 3 = 157$

$157 \div 23 = 9$ ಲಬ್ಧ, 19 ಶೇಷ

ದತ್ತಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 36,

ಶೇಷ $19324 - \begin{pmatrix}7 & 6\\ 3 & 6\end{pmatrix} \times 100 - \begin{pmatrix}6 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix} \times 10 - (5 \times 6)$

$= 19324 - 6000 - 510 - 30 = 12784.$

(ಜ) $7891234 \div 16657.$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಿಗಳಿರುತ್ತವೆ.

657	78	9	1	2	34
16		14	13	21	
	4	7	3		

$78 \div 16 = 4$ ಲಬ್ಧ, 14 ಶೇಷ

$149 - 6 \times 4 = 125$

$125 \div 16 = 7$ ಲಬ್ಧ, 13 ಶೇಷ

$$131 - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 131 - 62 = 69$$

$69 \div 16 = 3$ ಲಬ್ಧ, 21 ಶೇಷ

ದತ್ತಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 473.

$$\text{ಶೇಷ} = 21234 - \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \times 100 - \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times 10 - (7 \times$$

$$= 21234 - (18 + 35 + 28) \times 100 - (15 + 49) \times 10 -$$

$$= 21234 - 8100 - 640 - 21 = 12473.$$

೬

ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳು
(Recurring Decimals)

೬. ೧. ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದ(denominator)ದಲ್ಲಿ 2, 5 ಅಥವಾ ಇವುಗಳ ಘಾತಗಳು (powers) ಇದ್ದರೆ, ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಕೆಲವು ಸ್ಥಾನಗಳ ನಂತರ ದಶಮಾಂಶವು ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಉದಾ :

$$\tfrac{1}{2}=0\cdot5,$$

$$\tfrac{1}{5}=0\cdot2,$$

$$\tfrac{1}{16}=0\cdot0625,$$

$$\tfrac{1}{40}=0\cdot025.$$

ಹೀಗೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದ ಕಡೆಯ ಅಂಕೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶದ ಕಡೆಯ ಅಂಕೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ ಸೊನ್ನೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದಲ್ಲಿ, 3 ಅಥವಾ 7 ಅಪವರ್ತನ ವಿದ್ದರೆ, ದಶಮಾಂಶವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆದರ ಅಂಕಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತವಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತವೆ. ಉದಾ :

$$\tfrac{1}{3}=0\cdot333\ldots,$$

$$\tfrac{1}{7}=0\cdot142857\;142857\ldots$$

ಇವನ್ನು $\frac{1}{3}=0\cdot\dot{3}$, $\frac{1}{7}=0\cdot\dot{1}4285\dot{7}$ ಎಂದು ಬರೆಯು
ತ್ತೇವೆ. ಛೇದದಲ್ಲಿ 3, 7ರ ಘಾತಗಳ ಜತೆಗೆ 2, 5 ಸಹ
ಇದ್ದರೆ, ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಕವಾಗದ ಭಾಗವೂ ಆವರ್ತಕ
ವಾಗುವ ಭಾಗವೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾ:

$$\frac{1}{6}=0\cdot1\dot{6},$$

$$\frac{1}{14}=0\cdot0\dot{7}1428\dot{5}.$$

ಶುದ್ಧ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ
ಛೇದದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ
ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ
ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 9.

ಉದಾ: $\frac{1}{7}=0\cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $7\times7=49$

$\frac{1}{33}=0\cdot\dot{0}30\dot{3}$, $3\times3=9$

ಶುದ್ಧ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶದ ಆವರ್ತಕಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂ
ಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, ಈ ನಿಯಮವು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ
ಉದಾ: $\frac{1}{43}$ ರಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 3
$\frac{1}{57}$ ರಲ್ಲಿ 7, ಇತ್ಯಾದಿ.

೬. ೨. ದತ್ತಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ (numerator
1 ಎಂದೂ, ಛೇದದಲ್ಲಿ 2, 5 ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಭಾ
ಸೋಣ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶಗೈಯಲು, ಇರು
ಸುಲಭ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವೆವು.

$\frac{1}{7}$ ನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ದಶಮಾಂಶದ ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 7.

```
7 ) 1·0 ( 142857
      7
     ---
      3 0
      =
      2 8
      ---
        2 0
        =
        1 4
        ---
          6 0
          =
          5 6
          ---
            4 0
            =
            3 5
            ---
              5 0
              =
              4 9
              ---
                1
```

ಮೇಲಿನ ಭಾಗಹಾರದಲ್ಲಿ, ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಗೀರುಗಳಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಶೇಷ 3. ಇದನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಎರಡನೆಯ ಶೇಷವು ಬರುತ್ತದೆ. ಭಾಜಕ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$3 \times 3 = 9$. $9 \div 7 =$ ಶೇಷ 2. ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಮುಂದಿನ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. $2 \times 3 = 6$, $6 \times 3 \equiv 4$ [7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಗಣಿತಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ $4 (\text{mod } 7)$], $4 \times 3 \equiv 5$, $5 \times 3 \equiv 1$.

ಈ ಶೇಷಗಳಿಂದೇನು ಪ್ರಯೋಜನ? ಇವುಗಳಿಂದ ದಶಮಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಾನ. ಶೇಷಗಳೊಡನೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 1ನ್ನೂ ಶೇಷ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಮೇಲೆ ಬರುವ 1, 3, 2, 6, 4, 5 ಇವುಗಳನ್ನು 10ರಿಂದ (ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ) ಗುಣಿಸಿ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳು: ಹೀಗೆ 1 4 2 8 5 7 ಬರುತ್ತವೆ.

ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ. 3, 2, 6, 4, 5, 1 ನ್ನು ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 7ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ. ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಗಳು 1 4 2 8 5 7.

ವಿಧಾನಗಳು ಮಂದಟ್ಟಾಗುವಂತೆ, $\frac{1}{13}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$$\begin{array}{r|l} 13 \;)\; 10 \;(& \cdot 07 \\ 0 & \\ \hline 100 & \end{array}$$

ಮೊದಲನೆಯ ಶೇಷ 10,

$10 \times 10 \equiv 9 \pmod{13}$, $9 \times 10 \equiv 12$,

$12 \times 10 \equiv 3$, $3 \times 10 \equiv 4$, $4 \times 10 \equiv 1$.

ಶೇಷಗಳು 10, 9, 12, 3, 4, 1

ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಾನದಂತೆ, 1, 10, 9, 12, 3, 4, ಇವನ್ನು 10ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 13ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಲಬ್ಧಗಳೇ ದಶಮಾಂಶದ

$$\therefore \tfrac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$$

ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, 10, 9, 12, 3, 4, 1 ಇವುಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಕಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿ 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೊಡನೆಯೇ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಗಳು 0, 7, 6, 9, 2, 3 ಬರುತ್ತವೆ.

ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನವು ಬಹಳ ಸುಲಭ.

೬. ೩ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನಡೆಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ, ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ,

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 7 \\ \hline 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 7 & 6 \\ 9 & 2 & 3 \\ \hline 9 & 9 & 9 \end{array}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆ

ಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಮೇಲೆ, ಕಡೆಯ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಡ
ನೆಯೇ ಬರುತ್ತವೆ

ಎಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸುವುದು ? ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ, ದತ್ತ
ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದ ಅಂಶಗಳ ಅಂತರ ಬಂದೊಡನೆ ನಿಲ್ಲಿಸ
ಬಹುದು.

ಉದಾ: $\frac{1}{7}$. ಶೇಷಗಳು 3 2 6 4 5 1.

6 = ಛೇದ 7 — ಅಂಶ 1.

$\frac{1}{13}$. ಶೇಷಗಳು 10, 9, 12, 3, 4, 1.

12 = 13 − 1.

ಛೇದವು ನಿರಪವರ್ತಕ ಸಂಖ್ಯೆ (prime number)
ಯಾದರೆ ಮಾತ್ರ, ಈ ವಿಧಾನವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸರಿಯಿರು
ತ್ತದೆ. ಆದರೂ, ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಿರುವು
ದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

೬. ೪. ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ವಿಧಾನ
ಗಳಿಗಿಂತ ಸುಲಭ. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ "ಏಕಾಧಿಕಪೂರ್ವಸೂತ್ರ"
ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅರ್ಥಾತ್, ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದ
ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದು.

ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 9
ಇರಬೇಕು. 9 ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
ಹೇಗೆಂದರೆ $\frac{1}{7}=\frac{7}{49}$, $\frac{1}{13}=\frac{3}{39}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುವೆವು

(೧) $\frac{1}{19}$. ಛೇದದಲ್ಲಿ, 9ರ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 1, ಅದರ ಏಕಾಧಿಕ=1+1=2. ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 1. (ಸೂ. ೧. ನೋಡಿ) ಈ 1ನ್ನು ಬಲಗಡೆ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಿ

9 4 7 3 6 8 4 2 1
  1   1 1

8×2=16. 6ನ್ನು ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟು, 1ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಇಟ್ಟು ಮುಂದಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ

$$6\times 2+1=3, \quad 3\times 2+1=7.$$
9×2=18=ಛೇದ−ಅಂಶ.

ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಿಂದಿನ 9 ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

9	4	7	3	6	8	4	2	1
0	5	2	6	3	1	5	7	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{1}{19} = \cdot\dot{0}5263157894736842\dot{1}$

(ಒಟ್ಟು 18 ಅಂಕಿಗಳಿವೆ)

(೨) ಹೀಗೆಯೇ $\frac{1}{29}$. ಏಕಾಧಿಕ = 2+1=3. ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 1.

9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1
1 1 1   2   1   1 2 2

$9 \times 3 + 1 = 28 =$ ಛೇದ – ಅಂಶ. ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

9	6	5	5	1	7	2	4	1	3	7	9	3	1
0	3	4	4	8	2	7	5	8	6	2	0	6	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

$\therefore \frac{1}{29} = \cdot\dot{0}34482758620689655172413793\dot{1}.$

(ಒಟ್ಟು 28 ಅಂಕಿಗಳು)

(೩) $\frac{1}{39}$. ಏಕಾಧಿಕ 4.

$\frac{1}{3.9} = \dot{0} \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad \dot{1}$

$\quad\quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$

$39 = 3 \times 13$ ನಿರಪವರ್ತಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವ "ಒಂಬತ್ತರ ನಿಯಮ"ವು ಒದಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕ್ರಮವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿಯೇ ಮಾಡಬೇಕು. 6 ಅಂಕಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ.

(೪) $\frac{1}{49}$. ಏಕಾಧಿಕ 5.

$\frac{1}{49} = 0\cdot\dot{0}20408163265306122448$

$979591836734693877 55\dot{1}$

42 ಅಂಕಿಗಳು.

ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿರುವ $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$ ಗಳನ್ನು ಏಕಾಧಿಕ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ.

(ಅ) $\frac{1}{7} = \frac{7}{49}$. ಏಕಾಧಿಕ 5, ದಶಮಾಂಶದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 7.

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

$5 \times 8 + 2 = 42 = 49 - 7$. ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿ, ಮೊದಲ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳಾದ 142 ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{array}{ccc} 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & \\ \hline 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$\frac{1}{7} = 0\cdot\dot{1}4285\dot{7}$.

(ಆ) ಹೀಗೆಯೇ $\frac{1}{13} = \frac{3}{39} = 0\cdot\dot{0}76\ 92\dot{3}$.

(ಇ) $\frac{1}{11} = \frac{9}{99} = \cdot\dot{0}\dot{9}$

(ಈ) $\frac{1}{17} = \frac{7}{119} = \cdot\dot{0}58823529411764\dot{7}$.

ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಹಿಡಿದು ಏಕಾಧಿಕದಿಂದ ಗುಣಿಸುವ ಬದಲು, ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಇದೇ ಏಕಾಧಿಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ದಶಮಾಂಶಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$\frac{1}{7} = \frac{7}{49}$. ಏಕಾಧಿಕ 5.

$$
\begin{array}{r|llllll}
5 & 7 & 0 & & & & \\
 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\
 & 2 & & 4 & 2 & 3 &
\end{array}
$$

ವಿವರಣೆ: 7 ÷ 1 – ಲಬ್ಧ 1 ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ
ಶೇಷ 2 ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ

20 ÷ 5 = 4 ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ

ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 14.

14 ÷ 5 ಲಬ್ಧ 2 ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ
ಶೇಷ 4 ಮೂರನೆಯ ,,

ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 42.

42 ÷ 5 ಲಬ್ಧ 8, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ
ಶೇಷ 2 ಮೂರನೆಯ ,,

ಹೀಗೆಯೇ 28. 28 ÷ 5 ಲಬ್ಧ 5, ಶೇಷ 3
35 ÷ 5 ಲಬ್ಧ 7. (ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಜ್ಯ)

ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. 42 ಬಂದಾಗಲೇ, (ಎಂದರೆ ಛೇದ–ಅಂಶ) ನಿಲ್ಲಿಸಿ ಉಳಿದ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು

$$
\begin{array}{ccc}
9 & 9 & 9 \\
1 & 4 & 2 \\
\hline
8 & 5 & 7
\end{array}
$$

ಎಂದು ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

$\frac{1}{13} = \frac{3}{39}$. ಏಕಾಧಿಕ 4.

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 3 & 0 & \\ & 0 & 7 & 6 \\ & 3 & 2 & 3 \end{array}$$

$30 \div 4 =$ ಲಬ್ಧ 7, ಶೇಷ 2

$27 \div 4 =$,, 6, ,, 3

36, ಇದು ಛೇದ—ಅಂಶ.

ಉಳಿದ ಅಂಕಿಗಳು 9 9 9 = 923

0 7 6

$\therefore \frac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$

ಭಾಗಹಾರದ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನವು ಸುಲಭವಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಸಾಕು.

೬. ೪. **ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾದ ಗುಣ.**

(a) $\frac{1}{7} = 0\cdot\dot{1}4285\dot{7}$,

$142857 \times 7 = 999999$

$142 + 1 = 143$, $143 \times 999 = 142857$

$$\therefore \frac{1}{7} = \frac{143 \times 999}{999999} = \frac{142857}{999999} = \cdot\dot{1}4285\dot{7}$$

$143 \times 7 = 1001$.

(b) ಹೀಗೆಯೇ, $\frac{1}{13} = \dot{0}7692\dot{3}$,

$076923 \times 13 = 999999$

$077 \times 999 = 076923, \quad 077 \times 13 = 1001.$

(c) $\frac{1}{17} = \cdot\dot{0}58823529411764\dot{7}$

$5882352941176 47 \times 17$

$= 999,999,999,999,999,9.$

$5882353 \times 17 = 100000001$

ಇಂಥದೇ ಗುಣಗಳನ್ನು $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$ ಮುಂತಾದ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶಗಳು ಪಡೆದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

೬. ೫. ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ "ಒಂಬತ್ತರ ಗುಣ" ವನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಕ್ಕೂ ತಂದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಭಾಗಹಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ದಶಮಾಂಶಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸುವಾಗ, ಬರುವ ಶೇಷಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಗುಣವಿದೆ.

$\frac{1}{7}$ ಕ್ಕೆ ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 2, 6, 4, 5, 1 (ಹಿಂದೆ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ). ಈಗ

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \\ \hline 7 & 7 & 7. \end{array}$$

ಹೀಗೆಯೇ, $\frac{1}{13}$ ಕ್ಕೆ ಶೇಷಗಳು 10 9 12 3 4 1

ಈಗ

10	9	12
3	4	1
13	13	13

$\frac{1}{17}$ ಕ್ಕೆ ಶೇಷಗಳು 10 15 14 4 6 9 5 16 7 2 3 13 11 8 12 1.

10	15	14	4	6	9	5	16
7	2	3	13	11	8	12	1
17	17	17	17	17	17	17	17

$\frac{1}{19}$ ಕ್ಕೆ ಶೇಷಗಳು

10	15	12	6	3	11	15	17	18
9	4	7	13	16	8	4	2	1
19	19	19	19	19	19	19	19	19

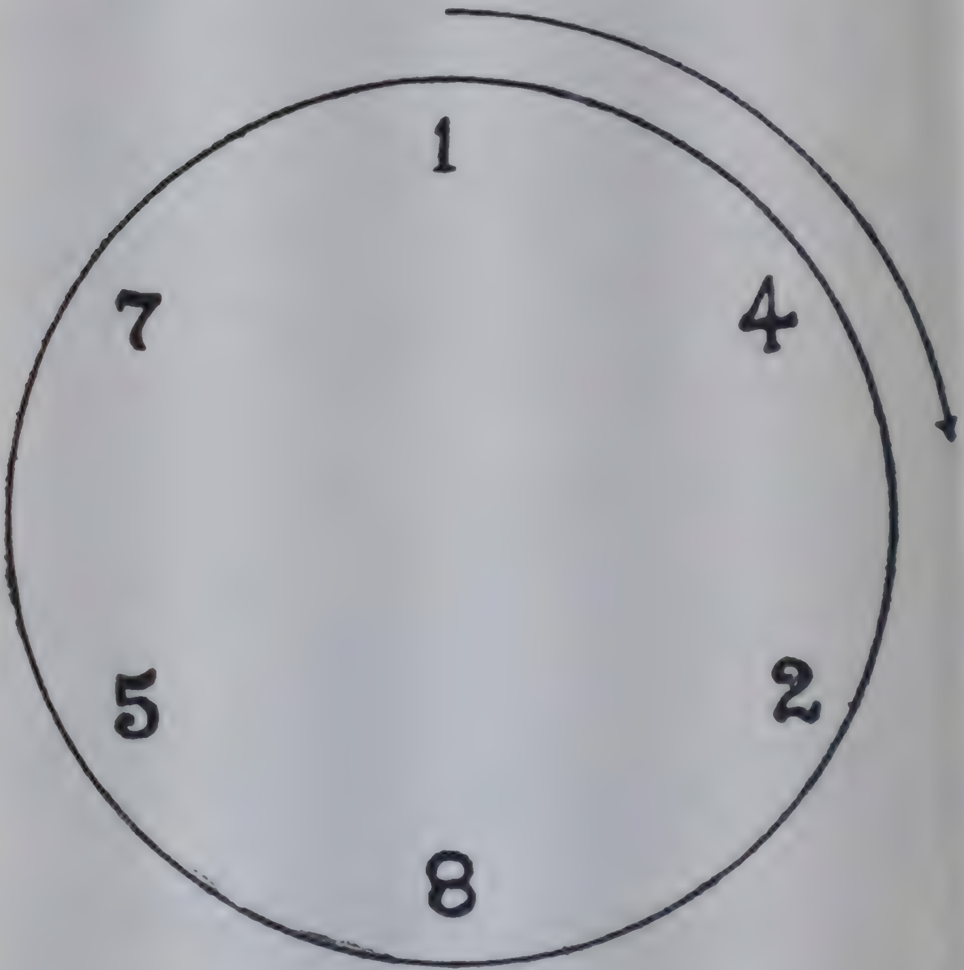
೬. ೬. ಇದುವರೆಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ(numerator) 1 ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅಂಶ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಬಗೆ ಏನು ? ವಿಧಾನವು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯಬರುವುದು.

$\frac{1}{7} = \cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $\frac{2}{7} = \cdot\dot{2}8571\dot{4}$,

$\frac{3}{7} = \cdot\dot{4}2857\dot{1}$, $\frac{4}{7} = \cdot571428$,

$\frac{5}{7} = \cdot\dot{7}1428\dot{5}$, $\frac{6}{7} = \cdot85714\dot{2}$,

ಎಲ್ಲದರಲ್ಲೂ ದಶವಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿ, ವರ್ತುಲಾಕಾರದಲ್ಲಿ (in cyclic order) ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತವೆ.



$\frac{1}{7}$ ಕ್ಕೆ ದಶವಾಂಶದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 7.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{2}{7}$ ಕ್ಕೆ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 4,

$\frac{3}{7}$ ಕ್ಕೆ 1 ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ಕಡೆಯು ಅಂಕಿ ಬರುವಂತೆ, ಚಕ್ರದ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ, ಆಯಾ ದಶಮಾಂಶವು ಬರುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೂ ವಿಧಾನವು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭ ವಿರುವುದಿಲ್ಲ. $\frac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$. ಇದರಲ್ಲಿ 6 ಅಂಕಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ. $\frac{2}{13}$, $\frac{3}{13}$ ಮುಂತಾಗಿ ಒಟ್ಟು 12 ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಗಳಿವೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೆರಡನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಪಡೆದು, ಮೇಲಣ ವಿಧಾನದಿಂದ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$\frac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$. ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$\frac{2}{13} = \cdot\dot{1}5384\dot{6}$ ವರ್ತುಲಾಕಾರವಾಗಿ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಾ,

$\frac{3}{13} = \cdot\dot{2}3076\dot{9}$, $\frac{4}{13} = \cdot\dot{3}0769\dot{2}$,

$\frac{5}{13} = \cdot\dot{3}8461\dot{5}$, $\frac{6}{13} = \cdot\dot{4}6153\dot{8}$,

$\frac{7}{13} = \cdot\dot{5}3846\dot{1}$, $\frac{8}{13} = \cdot\dot{6}1538\dot{4}$,

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಏಕಾಧಿಕಪೂರ್ವ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಈ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ.

೬. ೭. N ನಿರಪವರ್ತಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $\frac{1}{N}$ ರ

ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ N−1 ಅಥವಾ ಅದ
ಅಪವರ್ತನ $\frac{1}{7}$ರ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ 6 ಅಂಕಿಗಳಿವೆ, $\frac{1}{13}$
ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ 6 ಅಂಕಿಗಳಿವೆ. (6×2=12) ಆದ
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ರ ದಶಮಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕಿ ಮಾತ್ರ. ಒಂಬತ್ತ
ನಿಯಮವಿರುವ ಕಡೆ, ದಶಮಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತ 9ರಿ
ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯಾದ್ದರಿಂದ, $\frac{1}{N}$ ನ ದಶಮಾಂಶದ ಅಂ
ಗಳೇ $\frac{1}{3N}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{9N}$ ಗೂ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆ
$\frac{1}{63}=\frac{1}{7\times9}$ ರ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ 6 ಅಂಕಿಗಳು ಮಾ
ಇರುತ್ತವೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ ಬಿಟ್ಟು), ದ
ಮಾಂಶಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ (even number
ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರುವುದುಂಟು. $\frac{1}{79}$ರ ದಶಮಾಂಶದ
13 ಅಂಕಿಗಳಿವೆ. $\frac{1}{67}$ ರಲ್ಲಿ 33 ಅಂಕಿಗಳಿವೆ.

ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(a) $73\times137=10001$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{1}{73}=\frac{137}{10001}=\frac{137}{10001}\times\frac{9999}{9999}$$

$$=\frac{1369863}{99999999}=\cdot\dot{0}1369863$$

$$\frac{1}{137}=\frac{73}{10001}\times\frac{9999}{9999}=\cdot\dot{0}072992\dot{7}.$$

(b) $27\times37=999$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{1}{27}=\frac{37}{999}=\cdot\dot{0}3\dot{7}$$

$$\frac{1}{37}=\frac{27}{999}=\cdot\dot{0}2\dot{7}.$$

(c) $41\times271=11111$.

$$\therefore\ \frac{1}{41}=\frac{41}{11111}\times\frac{9}{9}=\cdot\dot{0}243\dot{9}$$

$$\frac{1}{271}=\frac{41}{11111}\times\frac{9}{9}=\cdot\dot{0}36\dot{9}.$$

(d) $\frac{1}{91}=\frac{11}{1001}$

$$=\frac{11\times999}{999999}=\cdot\dot{0}1098\dot{9}.$$